



TITLE:

超流動乱流と量子渦糸の運動(流体力学におけるトポロジーの問題)

AUTHOR(S):

坪田, 誠

CITATION:

坪田, 誠. 超流動乱流と量子渦糸の運動(流体力学におけるトポロジーの問題). 数理解析研究所講究録 1992, 817: 21-40

ISSUE DATE:

1992-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/83123>

RIGHT:

超流動乱流と量子渦糸の運動

東北大流体研 坪田 誠 (Makoto Tsubota)

§ 1 はじめに

流体力学に関する興味深い問題の一つに超流動ヘリウムがある。超流動の発見は古く、現在までに膨大な研究の蓄積があるが、いくつかの重要な問題が未解決のまま残されている。そのひとつが超流動乱流と量子渦糸に関する問題である⁽¹⁾。この問題が最近改めて注目されているのは、実験の精度がますます上がってきていることや、スーパーコンピュータの発達により量子渦糸の3次元運動の直接シミュレーションが可能になったためであろう。本報告ではこの問題について概観した後、筆者の最近の研究を紹介する。

§ 2 超流動ヘリウムと2流体モデル、量子渦糸

液体ヘリウム (^4He) は、その大きな量子力学的零点振動のため、常圧下では絶対零度まで冷却しても液体のままである。

そして、 $T_{\lambda} = 2.17\text{K}$ 以下で超流動状態（ヘリウム II）に移る。超流動とは、一言で言うと、粘性がなくなった状態である。そのため、通常の粘性流体が通り抜けられないような毛细管（直径 $1\mu\text{m}$ 程度）を圧力差無しで通り抜けたり、コップに置いておいたヘリウム II が勝手に縁をつたって外に出て行ってしまったりする。

液体ヘリウムの超流動転移は、本質的には、 ^4He 原子の Bose-Einstein 凝縮である。そして、それを流体力学的に現象論化したものが、Tisza 及び Landau の 2 流体モデルである。このモデルでは、ヘリウム II は、超流体（ボーズ凝縮体）と常流体（フォノン、ロトン等素励起の気体）の混合したものとして記述される。超流体が非粘性、エントロピー零の完全流体であるのに対し、常流体は通常の粘性流体として振る舞う。常流体の質量密度 ρ_n は $T = 0$ では 0 で、 $T = T_{\lambda}$ で全質量密度 ρ に等しくなるまで増加する。一方、超流体の質量密度 ρ_s は $\rho - \rho_n$ である。超流体、常流体の速度場 \mathbf{v}_s 、 \mathbf{v}_n の従う方程式は

$$\rho_s \frac{D \mathbf{v}_s}{D t} = - \frac{\rho_s}{\rho} \nabla P + \rho_s S \nabla T \quad (1)$$

$$\rho_n \frac{D \mathbf{v}_n}{D t} = - \frac{\rho_n}{\rho} \nabla P - \rho_s S \nabla T + \eta_n \nabla^2 \mathbf{v}_n \quad (2)$$

である。ここで S はエントロピー密度、 η_n は常流体の粘性係数である。式(1)の右辺は化学ポテンシャルの勾配を圧力 P と温度 T で表したものである。この2流体モデルはヘリウム II の特徴的現象をよく説明できる。例えば、定常な場合、London の式

$$\nabla P = \rho S \nabla T \quad (3)$$

を与えるが、これはヘリウム II に特徴的な熱-圧力効果を表す。

Bose 凝縮を起こしたヘリウム II では、巨視的波動関数 $\Psi(r)$ が定義される。

$$\Psi(r) = \sqrt{n(r)} \exp(i\phi(r)) \quad (4)$$

ここで、 $n(r)$ は粒子数密度である。超流体速度場 $v_s(r)$ は、

$$v_s(r) = \frac{\hbar}{m_4} \nabla \phi(r) \quad (5)$$

で与えられる。即ち、 $\text{rot } v_s = 0$ が成り立ち、 v_s は位相 ϕ を速度ポテンシャルとするポテンシャル流である。ヘリウム II 中で循環 κ を定義しよう。

$$\kappa = \oint_L v_s \cdot dl \quad (6)$$

もし積分経路 L を単連結領域中にとれば、 $\kappa = 0$ となり、渦は存在しない。しかし、もし L を多重連結領域にとれば (量子渦の場合は、超流動成分が排除された渦芯の回りの閉

じた経路を意味する)、 Ψ が空間座標の一価関数でなければならないという要請から、循環は

$$\kappa = n \frac{h}{m_4} \quad (n \text{ は整数}) \quad (7)$$

と量子化される。この渦は、特にイオンを用いた実験により詳しく調べられており、循環は $n = 1$ に対応する h/m_4 であり、渦糸の芯の半径 a_0 は (温度、圧力により変化するが) 1\AA 程度の原子のオーダーであることがわかっている。即ち、循環が非常に細い所に集中している、文字どおりの渦糸が実現している。

ヘリウム II の流れの実験で最もよく調べられているのは、熱カウンター流 (thermal counterflow) である。図 1 (a) のように、細管の端をヒーターで熱すると、常流体は高温側 (ヒーター側) から低温側 (ヘリウム槽) へ、超流体はその逆方向に流れる。そして、ネットな流束密度 $j = \rho_s v_s + \rho_n v_n$ が零の内部対流が生じる。図 1 (b) に温度差 ΔT 、圧力差 ΔP の流入熱量 W による変化の測定例を示す⁽²⁾。用いた円管は直径 $d = 0.01\text{cm}$ 、長さ $l = 10\text{cm}$ の細長いものである。最も特徴的なことは、このように管断面のアスペクト比が小さい場合、乱流遷移が 2 段階に起こることである。流入熱量 W が十分小さい場合、 v_n は、もし円管なら、ポアズイユ流

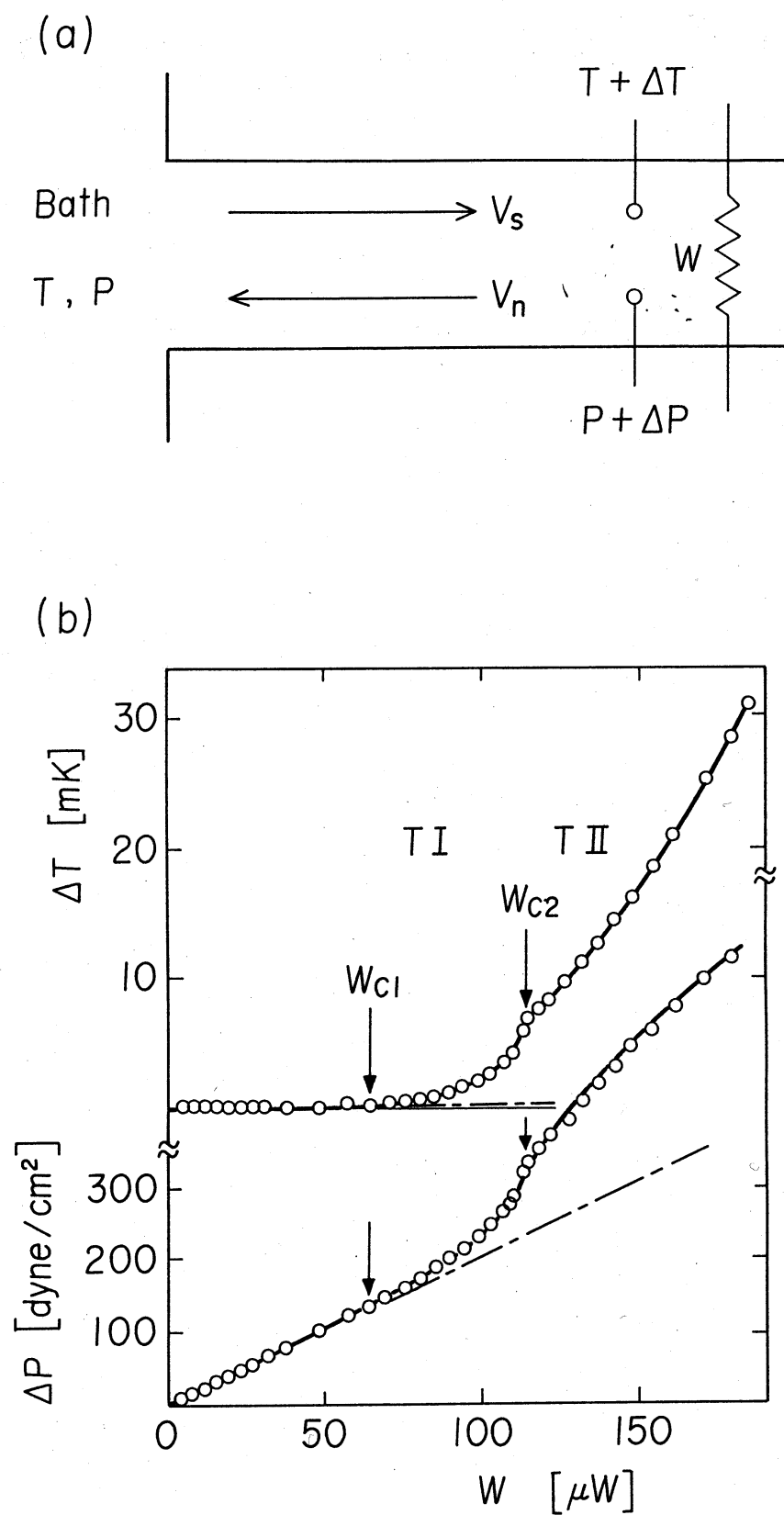


図 1 (a) 熱カウンター流

(b) 温度差 ΔT 、圧力差 ΔP の流入熱量 W 依存性 (2)

型の速度分布になり、 v_s は v_n とは逆方向の一樣流になる。

これが層流状態である。この場合、圧力差 ΔP_L は

$$\Delta P_L = \frac{32 \eta_n l}{d^2 \rho S T} W \quad (8)$$

となり、 W に比例する。そして、式(3)より、温度差 ΔT_L も W に比例する。流入熱量を上げていくと v_s が乱流になるが、この状態を超流動乱流という。曲線の形は $W > W_{c1}$ で比例関係からずれ (T I)、さらに $W > W_{c2}$ で再び変化している (T II)。この時、超流体中に量子渦糸が成長し、渦糸と常流体の間に相互摩擦力 F_{sn} が働く。もし、一樣な相対速度 $V = |v_n - v_s|$ の流体中に渦糸が線長密度 L (Line-Length Density、単位体積あたりの渦糸の長さ) で一樣に分布しているなら、

$$F_{sn} = \frac{\kappa \rho_s \rho_n B}{2 \rho} \cdot \frac{2 L V}{3} \quad (9)$$

となり、温度差は

$$\Delta T = \Delta T_L + \frac{l F_{sn}}{\rho_s S} \quad (10)$$

となる。温度差の ΔT_L からのズレを測定することにより、 L がわかる。この L は

$$L^{1/2} = \gamma(T)(V - V_0) \quad (11)$$

の形の V 依存性を示す。係数 $\gamma(T)$ は、 $W_{c1} < W < W_{c2}$ と W

$c_2 < W$ では値が異なる。この様に、 L は超流動乱流状態を特徴づける重要な量である。

§ 3 量子渦糸の運動方程式と数値計算方法

本節で述べる基礎方程式⁽³⁾とその計算方法は実際に、Schwarz⁽⁴⁾、⁽⁵⁾、及び著者ら⁽⁶⁾が用いたものである。

有限温度における量子渦糸の運動方程式について述べる。

まず、渦糸上の点 s には次式のような、マグナス力が働く。

$$f_M = \rho_s \kappa \frac{ds}{d\xi} \times \left(\frac{ds}{dt} - v_s \right) \quad (12)$$

ここで、 ξ は渦糸に沿って測った長さ、 t は時間である。次に、渦糸による素励起の散乱のため、

$$f_D = -\alpha \rho_s \kappa \frac{ds}{d\xi} \times \left[\frac{ds}{d\xi} \times (v_n - v_s) \right] \\ - \alpha \rho_s \kappa \frac{ds}{d\xi} \times (v_n - v_s) \quad (13)$$

で表される相互摩擦力が作用する。ここで、 α および α は温度に依存する係数である。今回の計算では約 1K を想定して $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0$ ととった。今、渦糸の芯が非常に細いためその慣性が無視できるので、式(12)及び(13)より、

$$f_M + f_D = \rho_s \kappa \frac{ds}{d\xi} \times \left[\left(\frac{ds}{dt} - v_s \right) - \alpha \frac{ds}{d\xi} \times (v_n - v_s) \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \alpha (v_n - v_s)] \\
& = 0
\end{aligned} \tag{14}$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned}
\frac{ds}{dt} &= v_s + \alpha \frac{ds}{d\xi} \times (v_n - v_s) \\
& - \alpha \frac{ds}{d\xi} \times \left[\frac{ds}{d\xi} \times (v_n - v_s) \right]
\end{aligned} \tag{15}$$

となり、これが量子渦糸の運動方程式である。量子渦糸が流体中の点 r に作る超流動速度場は、渦芯以外の領域に対しては、ビオ・サヴァールの法則

$$v_s(r, t) = \frac{\kappa}{4\pi} \int_L \frac{(s_1 - r) \times ds_1}{|s_1 - r|^3} \tag{16}$$

で与えられる。ここで、 L は渦糸に沿った線積分を表す。渦糸上の点 s は式(15)に従い、その場所での超流動速度場に乘って運動する。ところが、式(16)により、渦糸上の点 s での速度場を求めようとするとき発散する。それを回避するため、点 s での速度場を次のように二つの成分に分ける。

$$\begin{aligned}
v_s(s, t) &= \frac{\kappa}{4\pi} \frac{ds}{d\xi} \times \frac{d^2s}{d\xi^2} \ln \frac{2(1+1_-)^{1/2}}{e^{1/4} a_0} \\
& + \frac{\kappa}{4\pi} \int_L \frac{(s_1 - r) \times ds_1}{|s_1 - r|^3} + v_{s, a}
\end{aligned} \tag{17}$$

右辺第1項は点 s 近傍の曲率によって生じる局所的自己誘導場

(local self-induced field) であり、第 2 項は点 s 近傍以外の部分、及び他の渦糸から生じる非局所場 (nonlocal field) である。ここで、印加超流動流れ場を第 3 項として加えている。式 (15) および (17) が実際に数値計算の対象となる方程式である。

数値計算は次のようにして行われる。1 本の渦糸は点の 3 次元配列によって表現される。ある瞬間の渦糸の配置が式 (17) によって超流動速度場を決定し、渦糸上の点自身がそれに乗って運動する。自己誘導場項の数値不安定性を抑えるために、修正ホップスコッチ・アルゴリズムを採用する。2 本の渦糸が接近すると、点の間隔が変化する場合がある。この時は、局所的な精度を落とさぬよう、点を挿入あるいは除去するなどの処置を施す。

§ 4 Schwarz の計算

従来は、式 (17) の右辺第 2 項の非局所場項を無視した計算 (局所誘導近似) しか行われなかった。それは、勿論計算機が非局所場項を入れた計算を行うに値する性能を持っていなかったためであった。初めて、非局所場項を無視せずに量子渦糸の 3 次元運動を計算したのは、IBM Thomas J. Watson Research Center の K. W. Schwarz である (4), (5)。Schwarz

z はそれ以前にも動的スケーリングに基づく vortex tangle の理論を展開していたが⁽⁷⁾、文献(4)、(5)の分子動力学的手法による直接計算は、近年のスーパー・コンピュータの発達によって初めて可能になった。彼の一つの目標は、超流動乱流における vortex tangle を定量的にとらえる事であった。この場合、勿論、個々の渦糸の運動が実験的に測定できるわけではない。前節で述べた線長密度 L を計算から求めるために、Schwarz は以下の方法を用いた。

初期条件として、数個の渦輪を直方体の箱の中に適当に配置する。そして、一組の壁面が相対速度 V のカウンター流に垂直とし、その方向に周期境界条件を採用する。他の壁面には固体面の境界条件を適用する。渦輪はカウンター流によって駆動され、時間発展を行い、やがて初期条件に無関係で V によって決まる平衡状態に達する。その平衡状態での L を求め、実験値と比較する。十分乱流が発達したと考えられる後期乱流 T II では、 γ の大きさ、温度変化共に計算値は実験値に良く合う。パラメーター無しの計算である事を考えるとこれは驚くべき事で、Schwarz が扱った渦糸の運動法則並びに計算方法が正しい事を裏付けている。ところが、前期乱流 T I では計算値と実験値との一致は芳しくない。

実は、Schwarz はその計算のなかで、ある重要な仮定を行

っている。渦糸が運動すると、当然、他の渦糸（これは自分自身が曲折し巡り巡って接近してくる場合も含む）と接近し衝突する場合が考えられる。この時、通常の粘性流体なら、渦度の粘性拡散により、Reconnection が起こる⁽⁸⁾。しかし、超流動ヘリウムの場合何が起こるかは必ずしも自明ではない。Schwarz は、まず、渦糸上の点に対し、相手の渦がどの程度接近すれば、相手からの非局所場と自己誘導場が同じ大きさになるかという臨界距離 Δ を定義する。次いで、 Δ 以内に接近した2本の渦糸は、その近づき方に依らず、Reconnection を起こさせる。具体的に言うと、渦糸を構成する個々の点は常に両隣の点を認知しながら動いているが、 Δ 以内に他の渦糸上の点が侵入すると、それを隣の点と認知せよという命令を人工的に与えるのである（図2）。その後は、再び、ビオ・サヴァールの法則により運動を続ける。Schwarz の計算の中で、あいまいさが残るとすれば、この Reconnection の扱い方であろう。渦糸の密度が十分高いときはこの方法で問題はないが、密度が低く均一でない場合は問題となる。前期乱流 T I で L の計算値と実験値が合わない一因はこの点にあると思われる。

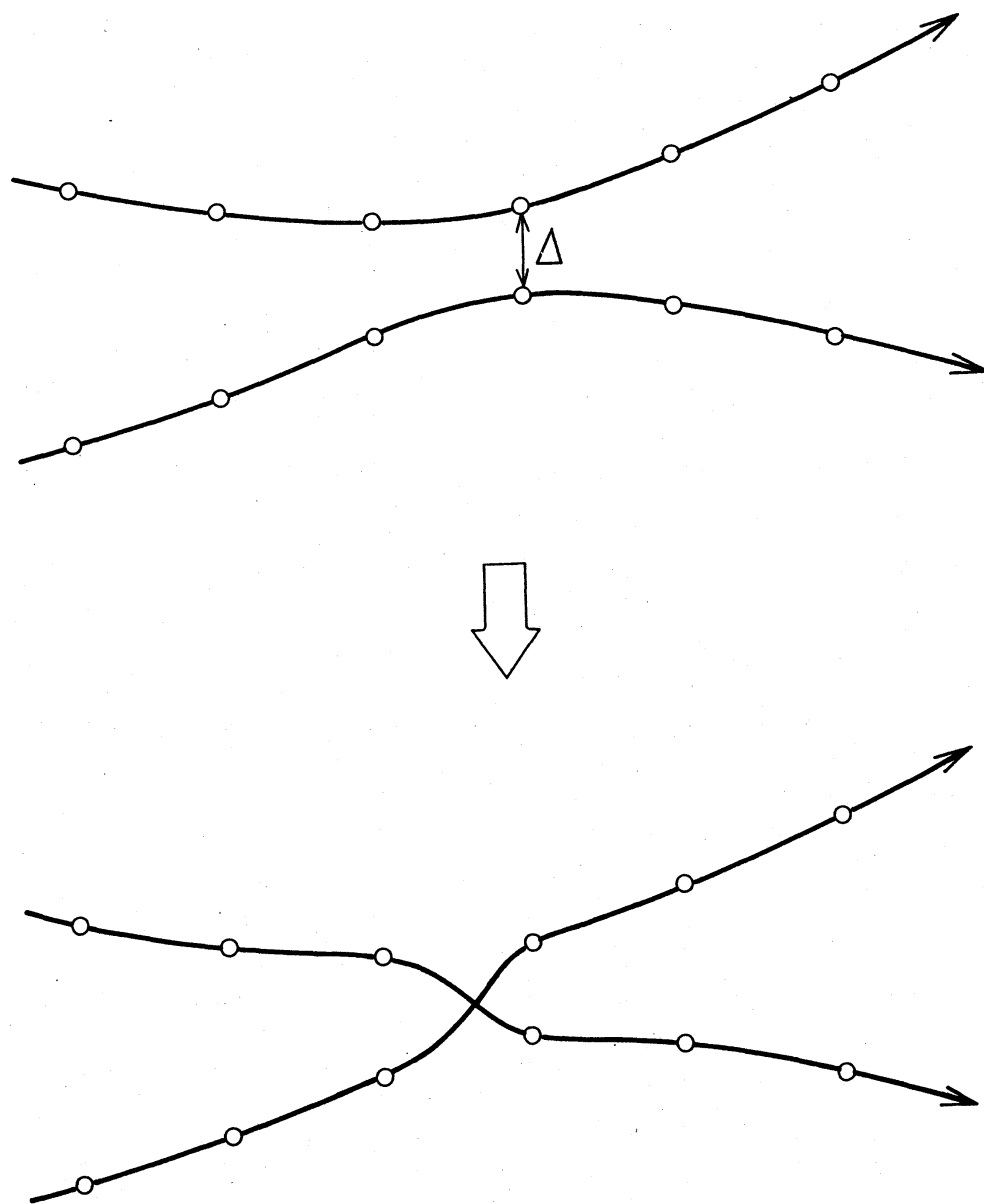


図 2 数 値 計 算 で の Reconnection の 取 扱 い

§ 5 渦輪と渦線の相互作用

Schwarz による Reconnection の扱い方には以下の点で疑問が残る。第 1 に、2 本の接近した渦糸の相互作用は両者のなす相対的角度に依るという点である。例えば、簡単のため、2 本の無限長の渦線が平行におかれた場合を考えよう。両者の渦度が平行ならば、それらは互いの回りを回転する（これを“相互回転運動”と呼ぼう）。一方、渦度が反平行ならば、同一方向に並進運動を行う。任意の形状の渦糸の場合、両者の渦度がなす角は任意であり、さらに自己誘導場も加わるため事情は複雑で、一概には言えないが、上記の定性的考察は以下の議論の参考になる。第 2 に、臨界距離 Δ は、例えば平行に進行する 2 個の同一半径 R の渦輪の場合だと、

$$\Delta = 2R / \ln(cR/a_0) \quad (18)$$

となる。ここで、 c は 1 のオーダーの定数である。この様に Δ は R と同じか、せいぜい 1 桁小さい程度であるから、通常、渦芯の半径 a_0 や数値計算上の点の間隔よりもかなり大きい。従って、 Δ 以内に接近してもなお、§ 3 で述べた計算は有効であろう。すると、接近する渦糸の近づき方如何では、一度 Δ 以内に近づいても、その後衝突せずに離れていく可能性も十分考えられる。

そこで、著者らは、最も典型的な場合として、渦輪と渦線

の相互作用を調べた⁽⁶⁾。図3に初期条件を示す。初期半径 $R = 10^{-4} \text{ cm}$ の渦輪が、中心を原点に重ね、法線方向を x 軸に平行にしておかれている。一方、渦線は z 軸に平行で、 $x-y$ 平面を貫く点の初期座標を (a, b) で与える。図中の矢印は渦度の方向を示す。この状態から、運動を開始すると、渦輪は渦線に向かって進んでくる。パラメーター b の値を変える事により、両者が衝突するときの相対角度を変えられる。 $(a, b) = (0.4R, R)$ の場合は、両者の最近接点の渦度が平行を保ちつつ接近するため、前述の相互回転運動が生じ、両者はすり抜ける（これは Schwarz も指摘している）。 $(a, b) = (0.4R, 0.8R)$ の場合を、図4(a)、(b)に示す（図中の矢印は渦輪の進行方向を示す）。これは、渦輪がそのまま変形せずに進めば渦線に衝突する場合であるが、やはり相互回転運動のためすり抜ける。図4(c)、(d)は $(a, b) = (0.4R, 0.6R)$ の計算例である。両者は自分自身をねじって何とかすり抜けようとする一方、近づくにつれて接近部の渦度を互いに打ち消すよう反平行に変形してくる。そして最終的には避けきれずに衝突する。それならば、もし渦輪がもっと遠方から動き始めたなら、すり抜けられるのではないかと予想される。 $(a, b) = (R, 0.6R)$ としてそれを示したのが図4(e)、(f)である。渦輪が接近するにつれ、渦線はいったん渦輪から後退する。十

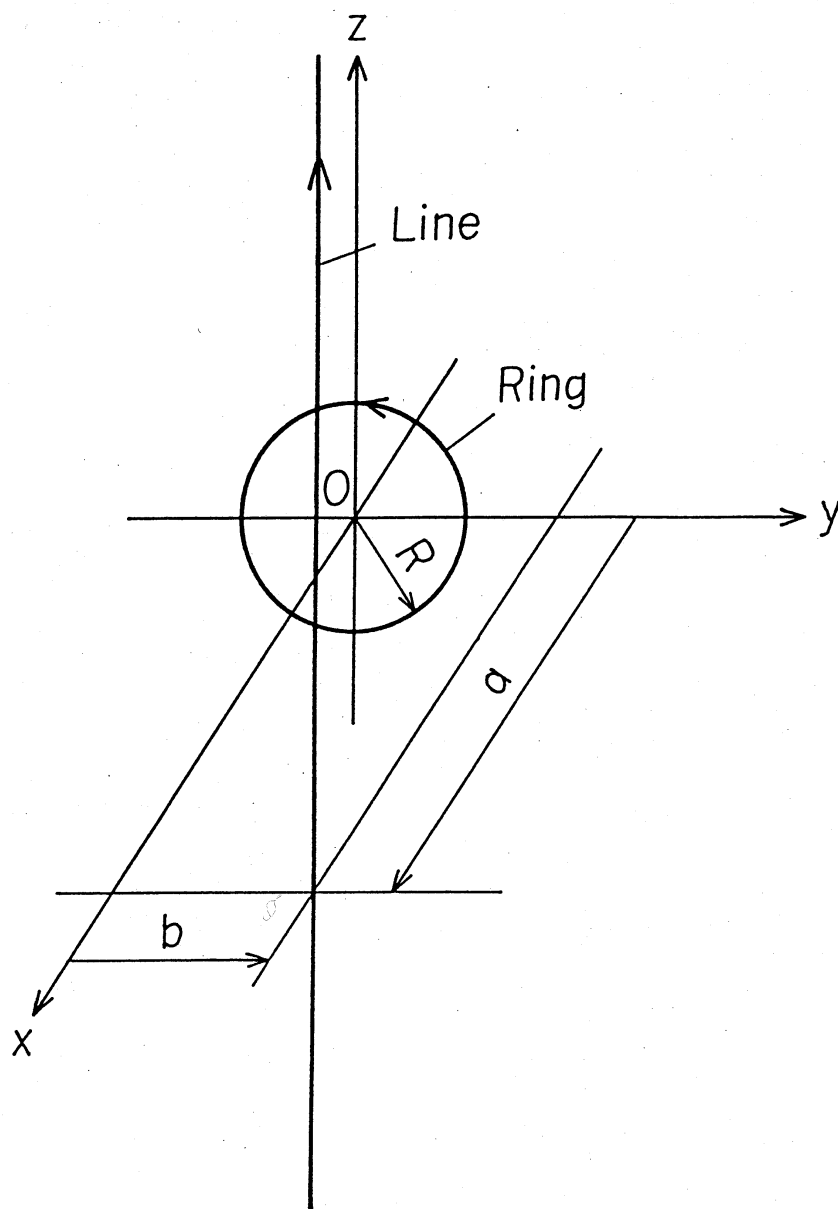


図 3 渦輪と渦線の初期配置

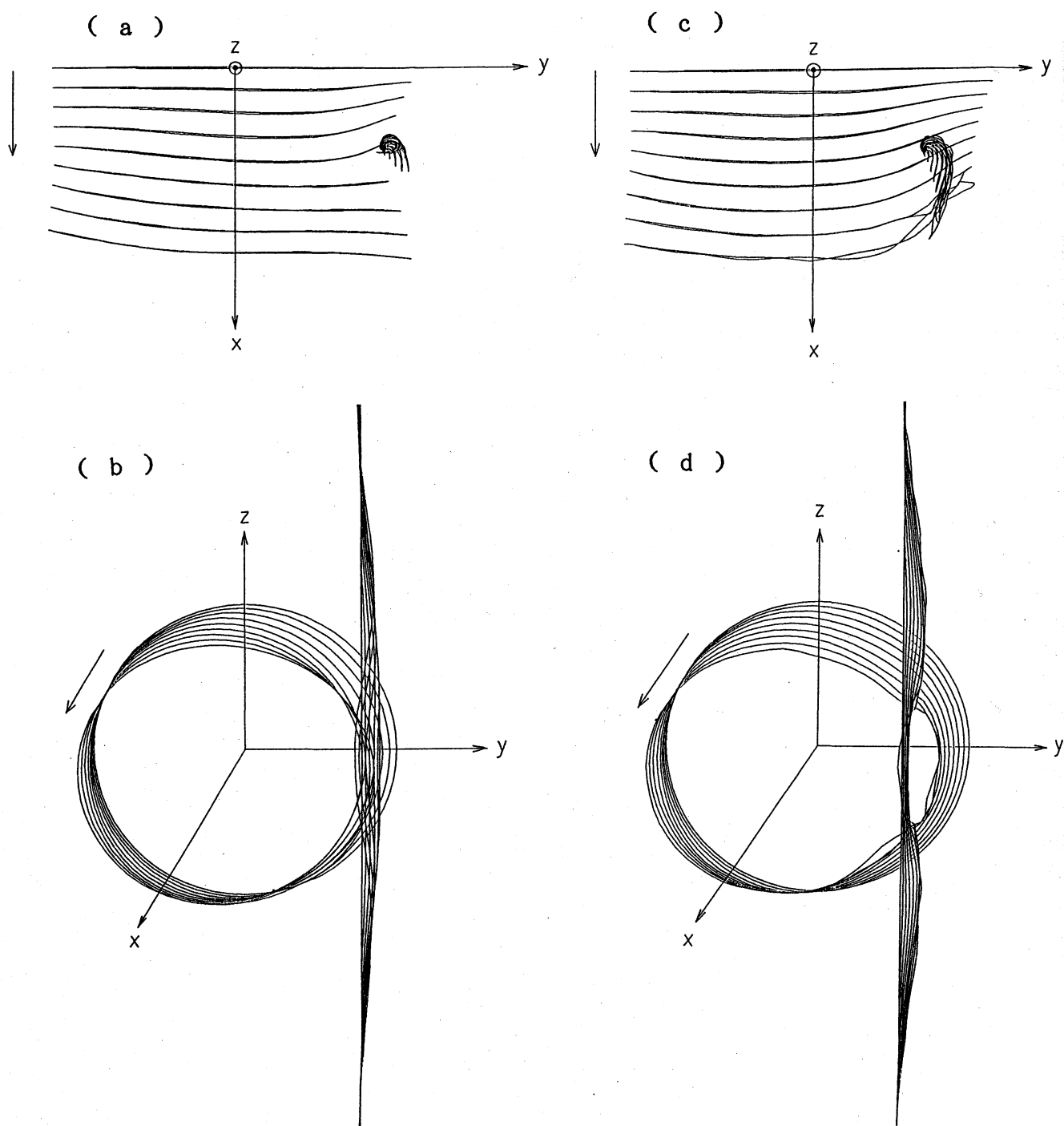


図 4 渦輪と渦線の衝突

(a) (b) (a , b) = (0 . 4 R , 0 . 8 R)

(c) (d) (a , b) = (0 . 4 R , 0 . 6 R)

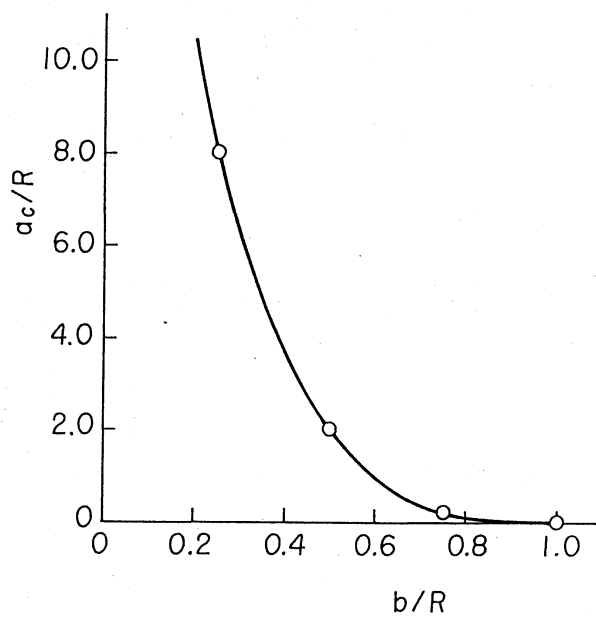
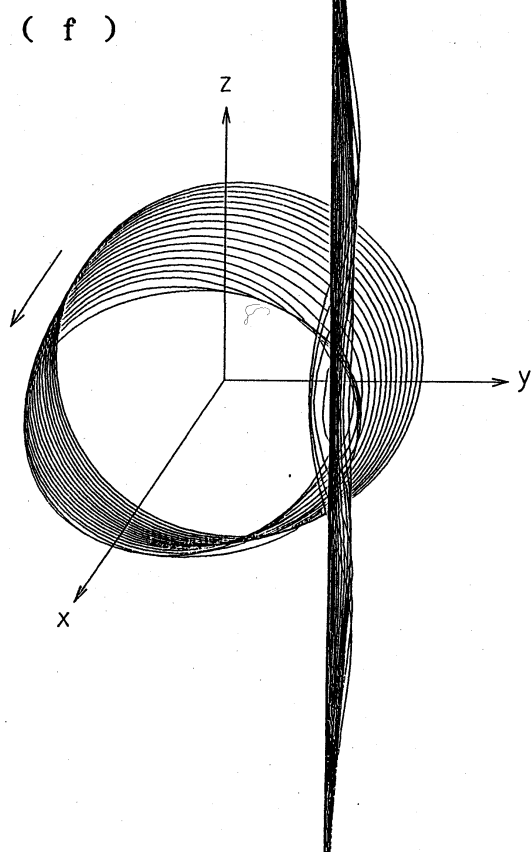
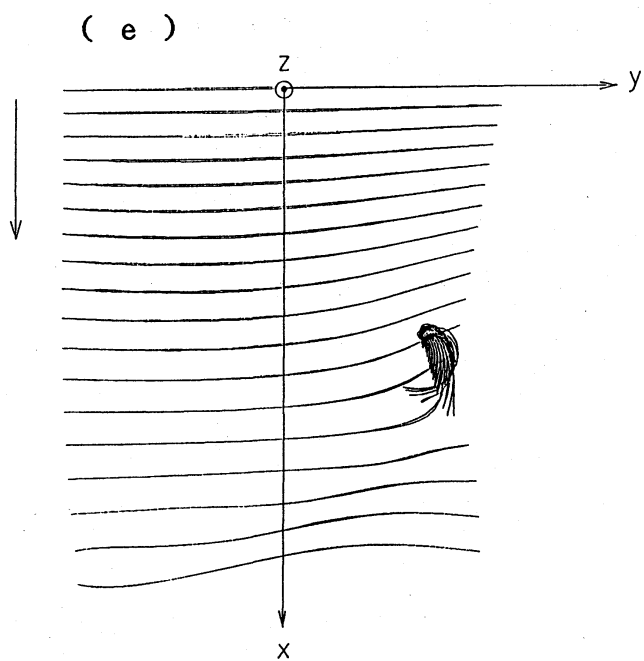


図 5 臨界距離 a_c の b 依存性

図 4 渦輪と渦線の衝突

$$(e) (f) (a, b) = (R, 0.6 R)$$

分渦輪を近づけてから、相互回転運動が生じて渦輪を回避する。

このことから、初期座標 a の臨界値 a_c が定義できる。 a_c より手前から出発した渦輪のみ、渦線に衝突できるものとして a_c を定めよう。この a_c の b 依存性を図 5 に示す。 a_c は b の減少関数である。衝突部分における両者の渦度は、 $b = R$ の場合の平行状態から、 b が減少するにつれて反平行状態へと変化する。そのため相互回転運動が効き難くなって、衝突し易くなるのである。当然ながら、 a_c を決める特徴的長さは R である。従って、渦糸の密度が低く、平均的な渦糸間距離が R の数倍程度の場合、渦糸の接近の仕方に依って Reconnection が起こったり起こらなかったりする。より詳細な議論は、文献 (6) を参照されたい。

§ 6 終わりに

ここで用いた流体力学的手法は、あくまで、渦芯の外の流れ場を記述するに過ぎない。2本の渦糸が十分に接近し、その芯の構造がもはや無視できないようになると、上記の計算は破綻する。この時には巨視的波動関数 $\Psi(r, t)$ に対する Gross-Pitaevskii 方程式 (非線形 Schrodinger 方程式) を解くなど、量子力学的理論を展開しなければならない。し

かし、現在までそのような理論はない。

本稿ではあまりふれなかったが、超流動乱流遷移は単にバルクの問題ではなく、境界条件に強く依存する。その芯の大きさが原子サイズの量子渦糸にとっては、いかなる平面も平滑ではありえない。それ故、非平滑な境界面による渦糸のピンニングが重要な問題となる。この問題は、Schwarz も調べていて、平面上におかれた半球上突起に引き込まれる渦糸の螺旋運動を見いだしている⁽⁴⁾。Schwarz は渦糸が一本の場合のみを調べているが、突起はその大きさに依存してピンニング容量を持つと考えられる。渦糸が複数の場合のピンニングの計算は、非常に困難ではあるが、有用な知見を与えるであろう。このことは前期乱流 T I の問題に関連している。

近年、Schwarz は vortex tangle の自由減衰の実験を行い、vortex tangle のみならず v_s 、 v_n が巨視的に乱れた”結合乱流(coupled turbulence)”という新概念を提唱している⁽⁹⁾。これに対しては、今後のさらなる研究が待たれる。

本研究は、東北大学大学院生前川進氏との共同研究である。また、本研究所の三浦紀重氏には、図面作成の援助を得たのでここに謝意を表す。本研究の数値計算は東北大学流体科学研究所スーパーコンピュータセンターの C R A Y Y - M P 8 により行われた。

参 考 文 献

- (1) J.T. Tough: *Progress in Low Temperature Physics*, ed. D.F. Brewer (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982) Vol. 8.
- (2) D.R. Ladner, R.K. Childers and J.T. Tough: *Phys. Rev. B* **13**(1976)2918.
- (3) R.J. Donnelly: *Quantized Vortices in Helium II* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- (4) K.W. Schwarz: *Phys. Rev. B* **31**(1985)5782.
- (5) K.W. Schwarz: *Phys. Rev. B* **38**(1988)2398.
- (6) M. Tsubota and S. Maekawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **61**(1992)2007.
- (7) K.W. Schwarz: *Phys. Rev. B* **38**(1978)245.
- (8) 高木隆司: 渦糸の理論, 物理学最前線, 大槻義彦編(共立出版, 1988)第21巻.
- (9) K.W. Schwarz and J.R. Rozen: *Phys. Rev. B* **44**(1991)7563.